読めない文字，答えのみ，また問いの条件に従っていない解答は採点の対象外となる場合がある

$\boxed{1}$ つぎの問いに答えよ．

(1) 動的な機械システムの挙動を表すにはどのような方程式を考える必要があるか説明せよ．

(2) システムの挙動を表した方程式を伝達関数で表現する場合と状態空間で表現する場合の違い，特徴について説明せよ．

(3) 状態方程式 $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ の解を書け．ただし $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $x(0) = x_0$ とする．

解説

このくらいは説明できるようになって欲しいので，出題しました．(3) も講義で何度も示した式です．

学習教育目標との関連： (1), (2)

解答：(1), (2) は 5 点，(3) は 10 点

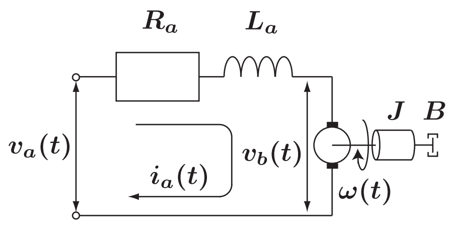
(1) 注目する変数の時間的変化の割合を微分方程式によって記述する必要がある．

(2) 伝達関数表現をした場合は特定の入出力間の特性しか分からない．状態空間表現の場合は入出力以外の状態の推移まで分かる．

(3) $x(t) = \mathrm{e}^{At}x_0 + \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}bu(\tau)\mathrm{d}\tau$

$\boxed{2}$ 図に示す直流モータの等価回路において，つぎの関係が成り立つとするとき，つぎの問に答えよ（各変数，定数の意味は省略）．

$$\begin{cases} L_a\dfrac{\mathrm{d}i_a(t)}{\mathrm{d}t} + R_a i_a(t) = v_a(t) - v_b(t) \\ J\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} + B\omega(t) = \tau(t) \\ v_b(t) = K_b\omega(t), \omega(t) = \dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}, \tau(t) = K_\tau i_a(t) \end{cases}$$



(1) 状態変数として $x_1(t) = i_a(t)$（電機子回路内の電流），$x_2(t) = \omega(t)$（回転子の角速度）としたとき，状態空間表現を求めよ．ただし，入力を $u(t) = v_a(t)$，出力を $y(t) = \omega(t)$ とせよ．

(2) (1) で得られた状態空間表現を伝達関数表現に変換せよ．ただし $R_a = L_a = J = B = K_b = K_\tau = 1$ とせよ．

解説

本講義で基本となる状態空間表現の導出についての問題です．講義でも取り上げた直流モータについて出題しました．

学習教育目標との関連： (1), (2), (3)

解答：各 15 点

(1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{K_b}{L_a}\\ \dfrac{K_\tau}{J_c} & -\dfrac{B}{J_c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

(2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

となるので，求める伝達関数 $G(s)$ はつぎとなる．

$$\begin{aligned}G(s) &= c^{\mathsf{T}}(sI-A)^{-1}b\\ &= \frac{1}{s^2+2s+2}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{s^2+2s+2}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ つぎで与えられるシステムの状態空間表現について，つぎの問いに答えよ．

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= \begin{bmatrix}2 & -4\\ 7 & -9\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)\end{cases}$$

(1) システムの固有値と可制御性を調べ，閉ループ極が $-3, -6$ となるように状態フィードバックゲインを設計せよ．

(2) システムの可観測性を調べ，状態オブザーバを設計せよ．オブザーバゲインは各自決めてよいが，選んだ根拠を示せ．

解説

本講義の重要事項である，状態フィードバックとオブザーバに関する問題です．

学習教育目標との関連： (4), (5), (6), (7), (8)

解答：(1) はシステムの固有値を示して 5 点，可制御性を調べて 5 点，状態フィードバックゲインを示して 5 点．(2) は可観測性行列を調べて 5 点，オブザーバを設計して 10 点

(1) システムの固有値はつぎとなる．

$$\begin{aligned}|A-\lambda I| &= \begin{vmatrix}2-\lambda & -4\\ 7 & -9-\lambda\end{vmatrix}\\ &= \lambda^2+7\lambda+10\end{aligned}$$

$$\lambda=-2,-5$$

また，可制御性行列 U_c は

$$U_c=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & -9\end{bmatrix}$$

となるので，U_c のランクは 2 となり，システムは可制御であることがわかる．したがって，状態フィードバック則を用いてシステムの極を任意に配置することができる．つぎに状態フィードバック入力として $u(t)=-Kx(t)$ として，フィードバックゲイン $K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$ を設計する．

$$A-bK=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 7 & -9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ k_1 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 7-k_1 & -9-k_2\end{bmatrix}$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
|sI - A + bK| &= \begin{vmatrix} s-2 & 4 \\ k_1 - 7 & s+9+k_2 \end{vmatrix} \\
&= s^2 + (7+k_2)s - 4k_1 - 2k_2 + 10
\end{aligned}
$$

となる．これが $s^2 + 9s + 18$ となる必要があることから，係数比較を行うことで求める状態フィードバックゲインは

$$k_1 = -3, k_2 = 2$$

となることがわかる．

(2) システムの可観測性行列はつぎとなる．

$$U_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

よって U_o のランクは 2 となり，システムは可観測であることがわかる．したがって，オブザーバを用いて状態ベクトルの値を推定できることがわかる．オブザーバの式

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + hy(t) - hc\hat{x}(t) = (A - hc)\hat{x}(t) + bu(t) + hy(t)$$

より $A - hc$ の極が $-7, -8$ となるようにオブザーバゲイン h を決定する．**このようにオブザーバゲインを選んだ根拠は，状態フィードバックにより設計する閉ループ極 $-3, -6$ よりオブザーバの極がより左半平面に存在するように設計し，状態が収束するより速くオブザーバにより推定される推定値を真値に収束させるためである．**したがって

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - A + hc| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 + h_1 & 4 \\ h_2 - 7 & \lambda + 9 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 + (h_1 + 7)\lambda + 9h_1 - 4h_2 + 10
\end{aligned}
$$

オブザーバの極が $-7, -8$ となるためには $\lambda^2 + 15\lambda + 56$ となる必要があるので，係数比較をして

$$\begin{cases} h_1 &= 8 \\ h_2 &= \dfrac{13}{2} \end{cases}$$

を得る．

$\boxed{4}$ 状態フィードバックにより閉ループの極を配置することにはどのような問題点があるか述べよ．さらに最適レギュレータについて，評価関数を $\int_0^\infty (x^\top Q x + ru^2)\mathrm{d}t$ として得られるフィードバックゲインの意味について説明せよ．

解説：

第 13 回目の講義で説明した最適レギュレータに関する問題です．具体的な設計はできなくてもよいですが，存在意義くらいは説明できるようになって欲しいので出題しました．

学習教育目標との関連： (9)

解答：重要な文節を太字で表した．これをキーワードとして各 5 点

「状態フィードバックにより閉ループの極を配置すると，**システムの応答を指定することはできるが，入力の大きさを考慮することはできない**，という問題点がある．実システムにおいては**入力の大きさに制限がある場合が多く，得られる制御性能と入力の大きさのバランスを取る必要がある**．そこで，評価関数を最小化する状態フィードバックゲインが設計出来る方法として最適レギュレータが知られている．この方法により設計されたフィードバックゲインは**評価関数を最小化するゲイン**であり，Q **と** r **の相対的な大きさを調整することにより，制御性能を重視したゲインや入力エネルギー抑制を重視したゲイン設計などができる．**」