平 成 23 年 度 佐 賀 大 学 理 工 学 部 機 械 シ ス テ ム 工 学 科 定 期 試 験 問 題
機　械　制　御 II（選　択）

$\boxed{1}$ 図 1 に示す 2 個のタンクが結合したシステムを考える．図において，$q_i(t)$ は流入流量，$q_o(t)$ は流出流量，C はタンクの断面積，$h(t)$ は水位，R は出口抵抗であり，右下添字の数字は各タンクごとに付けられた番号である．タンク単体の場合，水位の変化の微分方程式はつぎで与えられる．

$$C\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -q_o(t) + q_i(t) = -\frac{1}{R}h(t) + q_i(t)$$

このときつぎの問いに答えよ．

(1) タンク 1, 2 の水位の変化を表す微分方程式を示せ．

(2) (1) の結果より，状態変数ベクトルを $\begin{bmatrix} h_1(t) & h_2(t) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$，出力を $y(t) = h_2$ としたときの状態空間表現を示せ．

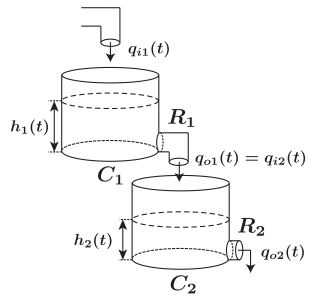

Figure 1: 2 タンクシステム

解説

中間試験で出題したタンクシステムに関する問題である．

学習教育目標との関連： (1), (2), (3)

解答：各 10 点

(1)

上段タンクの微分方程式はつぎで与えられる．

$$R_1C_1\frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t} = -h_1(t) + R_1q_{i1}(t)$$

下段タンクの微分方程式はつぎで与えられる．

$$R_2C_2\frac{\mathrm{d}h_2(t)}{\mathrm{d}t} = -h_2(t) + R_2q_{o1}(t) = -h_2(t) + \frac{R_2}{R_1}h_1(t)$$

(2) (1) の結果より状態空間表現はつぎで与えられる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & 0 \\ \dfrac{1}{R_1C_2} & -\dfrac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_{i1}(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ システムの伝達関数が $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{2s+1}{s^2+2s}$ で与えられるとき，つぎの問いに答えよ．

(1) 与えられたシステムの状態空間表現を求めよ．どの変数を状態変数にしたかを明示すること．

(2) 入力を $u(t) = ky(t)$ としたときの閉ループシステムの状態方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた閉ループシステムが安定となるように k を定めよ．

解説

本講義で基本となる状態空間表現の導出についての問題です．教科書 p. 117 の例題 6.1 の数値を変更して出題しました．講義で教示したことを普通に考えて解けば

学習教育目標との関連： (1), (2), (3)

解答：各 10 点

(1) 第 4 回目の講義と同様に考えることで，つぎの状態空間表現が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

(2) 閉ループシステムはつぎであらわされる．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\k & 2k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1\\k & -2+2k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

よって閉ループシステムの極は

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1\\-k & \lambda+2-2k\end{vmatrix}=\lambda^2+2(1-k)\lambda+k$$

より

$$-(1-k)\pm\sqrt{(1-k)^2-k}$$

となる．よって，極の実部が負となるためには

$$0<k<1$$

となればよいことがわかる．

$\boxed{3}$ つぎの状態空間表現で与えられるシステムについて，つぎの問いに答えよ．

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= \begin{bmatrix}-1 & 2\\-1 & 3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)\end{cases}$$

(1) システムの固有値と可制御性を調べ，閉ループ極が $-1, -4$ となるように状態フィードバックゲインを設計せよ．

(2) システムの可観測性を調べ，状態オブザーバを設計せよ．オブザーバゲインは各自決めてよいが，選んだ根拠を示せ．

解説

本講義の重要事項である，状態フィードバックとオブザーバに関する問題です．

学習教育目標との関連： (4), (5), (6), (7), (8)

解答：(1) はシステムの固有値を示して 5 点，可制御性を調べて 5 点，状態フィードバックゲインを示して 5 点．(2) は可観測性行列を調べて 5 点，オブザーバを設計して 10 点

(1) システムの固有値はつぎとなる．

$$\begin{aligned}|\lambda I-A| &= \begin{vmatrix}\lambda+1 & -2\\1 & \lambda-3\end{vmatrix}\\ &= \lambda^2-2\lambda-1\end{aligned}$$

よって固有値は

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$$

である．また，可制御性行列 U_c は

$$U_c = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

となるので，U_c のランクは 2 となり，システムは可制御であることがわかる．したがって，状態フィードバック則を用いてシステムの極を任意に配置することができる．$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ とすると $A_k = A - \boldsymbol{bk} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1-k_1 & 3-k_2 \end{bmatrix}$ である．A_k の特性方程式は

$$|\lambda I - A_k| = \lambda^2 + (-2+k_2)\lambda - 1 + 2k_1 + k_2 = 0$$

ある．これが，$(\lambda+1)(\lambda+4) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ と一致すればよいので，係数を比較して $-2+k_2 = 5, -1+2k_1+k_2 = 4$ が成り立つ．よって，$k_1 = -1, k_2 = 7$ なので，$k = \begin{bmatrix} -1 & 7 \end{bmatrix}$ である．

(2) システムの可観測性行列はつぎとなる．

$$U_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

よって U_o のランクは 2 となり，システムは可観測であることがわかる．したがって，オブザーバを用いて状態ベクトルの値を推定できることがわかる．オブザーバの式

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + hy(t) - hc\hat{x}(t) = (A - hc)\hat{x}(t) + bu(t) + hy(t)$$

より，解答例では $A - hc$ の極が $-7, -8$ となるようにオブザーバゲイン h を決定する．**このようにオブザーバゲインを選んだ根拠は，状態フィードバックにより設計する閉ループ極 $-1, -4$ よりオブザーバの極がより左半平面に存在するように設計し，状態が収束するより速くオブザーバにより推定される推定値を真値に収束させるためである．** したがって

$$\begin{aligned} |\lambda I - A + hc| &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 + h_1 & -2 \\ 1 + h_2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + (h_1 - 2)\lambda - 3h_1 + 2h_2 - 1 \end{aligned}$$

オブザーバの極が $-7, -8$ となるためには $\lambda^2 + 15\lambda + 56$ となる必要があるので，係数比較をして

$$\begin{cases} h_1 &= 17 \\ h_2 &= 54 \end{cases}$$

を得る．

$\boxed{4}$ 最適レギュレータによりフィードバックゲインを設計する際の特徴と問題点を説明せよ．

解説：
第 13 回目の講義で説明した最適レギュレータに関する問題です．具体的な設計はできなくてもよいですが，存在意義くらいは説明できるようになって欲しいので出題しました．
学習教育目標との関連： (9)

解答：つぎの項目のうち，1 項目の記述につき 10 点．合計 20 点

最適レギュレータにより設計されたフィードバックゲインは

- 評価関数を最小化するゲイン
- Q と r の相対的な大きさを調整することにより，制御性能を重視したゲインや入力エネルギー抑制を重視したゲイン設計などができる
- 指定した位置に閉ループ極を配置することはできない

という特徴と問題点を持つ．