

読めない文字、答え（単語）のみ、また問いの条件に従っていない解答は採点の対象外となる場合がある

1 つぎの問いに答えよ。

- (1) 動的な機械システムの挙動を表すにはどのような方程式を考える必要があるか説明せよ。
- (2) システムの挙動を表した方程式を伝達関数で表現する場合と状態空間で表現する場合の違い、特徴について説明せよ。
- (3) 状態方程式 $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ の解を書け。ただし $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $x(0) = x_0$ とする。

解説

このくらいは説明できるようになって欲しいので、出題しました。(3)も講義で何度も示した式です。
学習教育目標との関連：(1), (2)

解答：各 10 点

- (1) 注目する変数の時間的変化の割合を微分方程式によって記述する必要がある。
- (2) 伝達関数表現をした場合は特定の入出力間の特性しか分からない。状態空間表現の場合は入出力以外の状態の推移まで分かる。
- (3) $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$

2 図 1 に示す 2 慣性システムを考える。図において、 $x_1(t)$, $x_2(t)$ は台車 1, 2 の変位, M_1 , M_2 は台車 1, 2 の質量, K はばね定数, D はダンパ係数, $f(t)$ は台車 1 に加える力である。台車 1, 2 と床面との摩擦を無視すると、その運動方程式はつぎで表わされる。

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1(t) = f(t) - K(x_1(t) - x_2(t)) - D(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) \\ M_2\ddot{x}_2(t) = K(x_1(t) - x_2(t)) + D(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) \end{cases}$$

このとき、入力を $f(t)$, 出力を $x_2(t)$ としたときの状態空間表現を示せ。

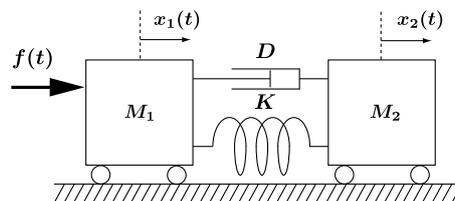


図 1: 2 慣性システム

解説

2 次システムが結合された構成ですが、運動方程式を与えているので状態空間表現を求めることは簡単であると思います。

学習教育目標との関連：(2)

解答：20 点

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ K & D & K & D \\ -\frac{1}{M_1} & -\frac{1}{M_1} & \frac{1}{M_1} & \frac{1}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{M_2} & \frac{D}{M_2} & -\frac{K}{M_2} & -\frac{D}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

3 つぎの状態空間表現で与えられるシステムについて、つぎの問いに答えよ。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

- (1) システムの固有値と可制御性を調べ、閉ループ極が $-3, -6$ となるように状態フィードバックゲインを設計せよ。
- (2) システムの可観測性を調べ、状態オブザーバを設計せよ。オブザーバゲインは各自決めてよいが、選んだ根拠を示せ。

解説

本講義の重要事項である、状態フィードバックとオブザーバに関する問題です。

学習教育目標との関連： (4), (5), (6), (7), (8)

解答：(1) はシステムの固有値を示して 5 点、可制御性を調べて 5 点、状態フィードバックゲインを示して 5 点。(2) は可観測性行列を調べて 5 点、オブザーバを設計して 10 点

(1)

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 5\lambda + 4 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 4) \end{aligned}$$

よってシステムの固有値はつぎとなる。

$$\lambda = -1, -4$$

また、可制御性行列 U_c は

$$U_c = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

となるので、 U_c のランクは 2 となり、システムは可制御であることがわかる。したがって、状態フィードバック則を用いてシステムの極を任意に配置することができる。つぎに状態フィードバック入力 $u(t) = -Kx(t)$ において、フィードバックゲイン $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ を設計する。

$$A - bK = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 - k_1 & 1 - k_2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

となるので,

$$\begin{aligned} |\lambda I - A + bK| &= \begin{vmatrix} \lambda + 3 + k_1 & k_2 - 1 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + (5 + k_1)\lambda + 2k_1 + 2k_2 + 4 \end{aligned}$$

となる. これが $\lambda^2 + 9\lambda + 18$ となる必要があることから, 係数比較を行うことで求める状態フィードバックゲインは

$$k_1 = 4, k_2 = 3$$

となることがわかる.

(2) システムの可観測性行列はつぎとなる.

$$U_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

よって U_o のランクは 2 となり, システムは可観測であることがわかる. したがって, オブザーバを用いて状態ベクトルの値を推定できることがわかる. オブザーバの式

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + hy(t) - hc\hat{x}(t) = (A - hc)\hat{x}(t) + bu(t) + hy(t)$$

より $A - hc$ の極が $-7, -8$ となるようにオブザーバゲイン h を決定する. このようにオブザーバゲインを選んだ根拠は, 状態フィードバックにより設計する閉ループ極 $-3, -6$ よりオブザーバの極がより左半平面に存在するように設計し, 状態が収束するより速くオブザーバにより推定される推定値を真値に収束させるためである. したがって

$$\begin{aligned} |\lambda I - A + hc| &= \begin{vmatrix} \lambda + 3 + h_1 & -1 \\ h_2 - 2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + (h_1 + 5)\lambda + 2h_1 + h_2 + 4 \end{aligned}$$

オブザーバの極が $-7, -8$ となるためには $\lambda^2 + 15\lambda + 56$ となる必要があるので, 係数比較をして

$$h_1 = 10, h_2 = 32$$

を得る.

4 最適レギュレータによりフィードバックゲインを設計する際の特徴と問題点を説明せよ.

解説:

講義 14 で説明した最適レギュレータに関する問題です. 具体的な設計はできなくてもよいですが, 存在意義くらいは説明できるようになって欲しいので出題しました.

学習教育目標との関連: (9)

解答: 重要な文節を太字で表した. これをキーワードとして各 5 点で計 20 点

「状態フィードバックにより閉ループの極を配置すると, システムの応答を指定することはできるが, 入力の大きさを考慮することはできない, という問題点がある. 実システムにおいては入力の大きさに制限がある場合が多く, 得られる制御性能と入力の大きさのバランスを取る必要がある. そこで, 評価関数を最小化する状態フィードバックゲインが設計出来る方法として最適レギュレータが知られている. この方法により設計されたフィードバックゲインは評価関数を最小化するゲインであり, Q と r の相対的な大きさを調整することにより, 制御性能を重視したゲインや入力エネルギー抑制を重視したゲイン設計などができる.」