平 成 25 年 度 佐 賀 大 学 理 工 学 部 機 械 シ ス テ ム 工 学 科 定 期 試 験 問 題
機　械　制　御 II（選　択）

読めない文字，答えのみ，また問いの条件に従っていない解答は採点の対象外となる場合がある

$\boxed{1}$ つぎの問いに答えよ．

(1) 制御とは何か？つぎの 3 つのキーワード（目的，対象，操作）を使って説明せよ．

(2) 自然界の法則に従ってある状態 $y(t)$ が変化する様子がつぎの微分方程式で表されるとき，「制御する」ということはどういうことかを説明せよ（つぎの数式をもとに説明すれば良い）．ここで a は負の値とする．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = ay(t), y(0) = y_0 \neq 0$$

(3) 状態方程式 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t)$ の解を書け．ただし $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ とする．

解説

このくらいは説明できるようになって欲しいので，あえて出題しました．(3) も講義で何度も示した式です．

解答

解答：(1), (2) は 5 点，(3) は 10 点

(1) 対象の出力を目的通りの値にするために操作を加えること

(2) 入力 $u(t)$ を外部から加えて状態 $y(t)$ の変化の様子を変えるということ．数式で表すとつぎとなり，状態 $y(t)$ の変化の様子を変えることとなる．

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = ay(t) + u(t), y(0) = y_0 \neq 0$$

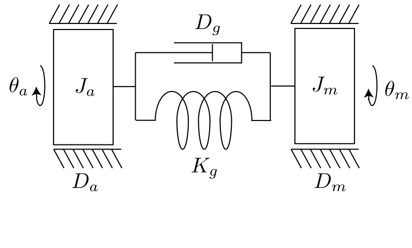
(3)

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$\boxed{2}$ 図に示すシステムは，2 つの慣性（モータ（変数の添字 m）とアーム（変数の添字 a））の間にばね要素とダンパ要素が入ったもので，**2 慣性系**と呼ばれる．ここで K_g は関節ばね定数，D_g はばねのねじれ量に対する粘性摩擦係数である．このシステムの運動方程式が (1), (2) 式で与えられた．モータの回転トルク $u_m(t)$ をシステムの入力とみなし，状態変数ベクトルを $\begin{bmatrix}\theta_a(t) & \theta_m(t) & \dot{\theta}_a(t) & \dot{\theta}_m(t)\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$，出力を $\theta_a(t)$ としたときの状態空間表現を求めよ．

$$J_a\ddot{\theta}_a(t) + D_a\dot{\theta}_a(t) = K_g\left(\theta_a(t) - \theta_m(t)\right) + D_g\left(\dot{\theta}_a(t) - \dot{\theta}_m(t)\right) \tag{1}$$

$$J_m\ddot{\theta}_m(t) + D_m\dot{\theta}_m(t) = u_m - K_g\left(\theta_a(t) - \theta_m(t)\right) - D_g\left(\dot{\theta}_a(t) - \dot{\theta}_m(t)\right) \tag{2}$$



解説

講義では説明していない 2 慣性系ですが，運動方程式を与えているので状態空間表現を求めることは簡単であると思います．

学習教育目標との関連： (2)

解答：20 点

(1) 式はつぎとなる．

$$\ddot{\theta}_a(t) = \frac{K_g}{J_a}(\theta_a(t) - \theta_m(t)) - \frac{D_a}{J_a}\dot{\theta}_a(t) + \frac{D_g}{J_a}\left(\dot{\theta}_a(t) - \dot{\theta}_m(t)\right)$$

また，(2) 式はつぎとなる．

$$\ddot{\theta}_m(t) = \frac{1}{J_m}u_m(t) - \frac{K_g}{J_m}(\theta_a(t) - \theta_m(t)) - \frac{D_m}{J_m}\dot{\theta}_m(t) - \frac{D_g}{J_m}\left(\dot{\theta}_a(t) - \dot{\theta}_m(t)\right)$$

これらより状態変数ベクトルを $\begin{bmatrix}\theta_a(t) & \theta_m(t) & \dot{\theta}_a(t) & \dot{\theta}_m(t)\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$，出力を $\theta_a(t)$ とすると，つぎの状態空間表現が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\theta_a(t)\\ \theta_m(t)\\ \dot{\theta}_a(t)\\ \dot{\theta}_m(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \dfrac{K_g}{J_a} & -\dfrac{K_g}{J_a} & \dfrac{D_g - D_a}{J_a} & -\dfrac{D_g}{J_a}\\ -\dfrac{K_g}{J_m} & \dfrac{K_g}{J_m} & -\dfrac{D_g}{J_m} & \dfrac{D_g - D_m}{J_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_a(t)\\ \theta_m(t)\\ \dot{\theta}_a(t)\\ \dot{\theta}_m(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \dfrac{1}{J_m}\end{bmatrix}u_m(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_a(t)\\ \theta_m(t)\\ \dot{\theta}_a(t)\\ \dot{\theta}_m(t)\end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ つぎで与えられる状態空間表現について，つぎの問いに答えよ．

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) & = \begin{bmatrix}5 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) & = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

(1) システムの極と可制御性を調べ，閉ループ極が $-4, -6$ となるように状態フィードバックゲインを設計せよ．

(2) システムの可観測性を調べ，状態オブザーバを設計せよ．オブザーバゲインは各自決めてよいが，選んだ根拠を示せ．

解説

本講義の重要事項である，状態フィードバックとオブザーバに関する問題です．

学習教育目標との関連： (4), (5), (6), (7), (8)

解答：(1) はシステムの極を示して 5 点，可制御性を調べて 5 点，状態フィードバックゲインを示して 5 点．(2) は可観測性行列を調べて 5 点，オブザーバを設計して 10 点

(1) システムの極はつぎとなる．

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix}\lambda - 5 & -4\\ 0 & \lambda + 3\end{vmatrix}\\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 15\\ &= (\lambda + 3)(\lambda - 5)\end{aligned}$$

$$\lambda = -3, 5$$

また，可制御性行列 U_c は

$$U_c = \begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 4\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

となるので，U_c のランクは 2 となり，システムは可制御であることがわかる．したがって，状態フィードバック則を用いてシステムの極を任意に配置することができる．つぎに状態フィードバック則を $u(t) = -\boldsymbol{f}x(t)$ として，フィードバックゲイン $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix}f_1 & f_2\end{bmatrix}$ を設計する．

$$A - b\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix}5 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ f_1 & f_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 4\\ -f_1 & -3 - f_2\end{bmatrix}$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - A + b\boldsymbol{f}| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ f_1 & \lambda + 3 + f_2 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 + (-2 + f_2)\lambda + 4f_1 - 5f_2 - 15
\end{aligned}
$$

となる．これが $\lambda^2 + 10\lambda + 24$ となる必要があることから，係数比較を行うことで求める状態フィードバックゲインは

$$
f_1 = \frac{99}{4}, f_2 = 12
$$

となることがわかる．

(2) システムの可観測性行列はつぎとなる．

$$
U_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}
$$

よって U_o のランクは 2 となり，システムは可観測であることがわかる．したがって，オブザーバを用いて状態ベクトルの値を推定できることがわかる．オブザーバの式

$$
\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + hy(t) - hc\hat{x}(t) = (A - hc)\hat{x}(t) + bu(t) + hy(t)
$$

より $A - hc$ の極を $-8, -9$ となるようにオブザーバゲイン h を決定する．**このようにオブザーバゲインを選んだ根拠は，状態フィードバックにより設計する閉ループ極 $-4, -6$ よりオブザーバの極がより左半平面に存在するように設計し，状態が収束するより速くオブザーバにより推定される推定値を真値に収束させるためである．** したがって

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - A + hc| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 + h_1 & -4 \\ h_2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 + (h_1 - 2)\lambda + 3h_1 + 4h_2 - 15
\end{aligned}
$$

オブザーバの極が $-8, -9$ となるためには $\lambda^2 + 17\lambda + 72$ となる必要があるので，係数比較をして

$$
\begin{cases} h_1 &= 19 \\ h_2 &= \dfrac{15}{2} \end{cases}
$$

を得る．

$\boxed{4}$ つぎの問に答えよ．

(1) 状態フィードバックによる極配置法にはどのような問題点があるか述べよ．

(2) 極配置法に比べて，評価関数を $\displaystyle\int_0^\infty (x^\top Qx + ru^2)\mathrm{d}t$ とする最適レギュレータの利点と問題点を述べよ．

(3) 折り返し法による最適レギュレータの設計は，どのような事が可能かを述べよ．

解説：

講義 14 で説明した最適レギュレータに関する問題です．具体的な設計はできなくてもよいですが，存在意義くらいは説明できるようになって欲しいので出題しました．

学習教育目標との関連： (9)

解答：重要な文節を太字で表した．これをキーワードとして各 10 点で計 30 点

(1) システムが可制御の場合，任意の位置に極配置可能であるが，**応答や入力の最大値やエネルギーなどを考慮できない**．

(2) **応答や入力の最大値やエネルギーなどを考慮でき，閉ループ系の安定性は保証される**が，**閉ループ極を任意の位置に配置することができない**．

(3) **閉ループシステムの最適性を満足しつつ，折り返し線より右側にある極を，折り返し線を対称軸として，より左半平面に配置することができる**．