読めない文字，答えのみ，また問いの条件に従っていない解答は採点の対象外となる場合がある

$\boxed{1}$ （1 つ 2 点．計 20 点）

つぎの文章の空欄に入る適切な語句を，語句一覧から選び，記号で答えよ．

「制御系設計において大切なのは制御対象の$\boxed{\text{D}}$を得ることである．一般に，制御工学は$\boxed{\text{F}}$を制御対象とするので，そのモデルは$\boxed{\text{H}}$で記述される．$\boxed{\text{H}}$を直接扱うことは不便なことが多いので，$\boxed{\text{L}}$して注目する変数の入力と$\boxed{\text{N}}$の関係を表す$\boxed{\text{O}}$を求め，制御系解析・設計を行うのが古典制御法と呼ばれる手法である．古典制御法は注目していない$\boxed{\text{N}}$の変化の様子や特性を解析・設計することは難しい．そこで，制御対象の$\boxed{\text{D}}$における変数を$\boxed{\text{Q}}$として表現する$\boxed{\text{S}}$が知られている．この表現は変数間の微分関係をそのまま保存した表現であり，注目する変数が$\boxed{\text{Q}}$に含まれるため，すべての変数の様子が解析・設計が可能である．システムの内部の様子も表現できるという意味で$\boxed{\text{S}}$は$\boxed{\text{T}}$と呼ばれる．これに対して$\boxed{\text{O}}$は$\boxed{\text{V}}$と呼ばれる．」

語句一覧

(A) 仮想モデル, (B) 統計学モデル, (C) 制御方法, (D) 数学モデル, (E) 静的モデル, (F) 動的モデル, (G) 偏微分方程式, (H) 微分方程式, (I) 差分方程式, (J) フーリエ変換, (K) 古典制御法, (L) ラプラス変換, (M) 入力, (N) 出力, (O) 伝達関数表現, (P) 差分表現, (Q) 状態変数ベクトル, (R) 状態平面表現, (S) 状態空間表現, (T) 内部表現, (U) 表面表現, (V) 外部表現

$\boxed{2}$ （20 点）

図 1 に示すマスばねダンパシステムを考える．M_i, K_i, D_i はそれぞれマスの質量，ばね定数，ダンパ係数を表し，$y_i(t)$ はマスの変位，$f(t)$ はマス 2 に働く力である．ここで $i = 1, 2$ とする．

このシステムの運動方程式がつぎで与えられた．マス 2 に働く力 $f(t)$ をシステムの入力とみなし，状態変数ベクトルを $\begin{bmatrix} y_1(t) & \dot{y}_1(t) & y_2(t) & \dot{y}_2(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$，出力をマス 1 から見たマス 2 の変位 $y(t) = y_2(t) - y_1(t)$ としたときの状態空間表現を求めよ．

$$\begin{cases} M_1\ddot{y}_1(t) &= -f_1(t) + f_2(t) \\ M_2\ddot{y}_2(t) &= -f_2(t) + f(t) \end{cases}$$

ここで $f_1(t) = D_1\dot{y}_1(t) + K_1y_1(t)$, $f_2(t) = D_2(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + K_2(y_2(t) - y_1(t))$ である．

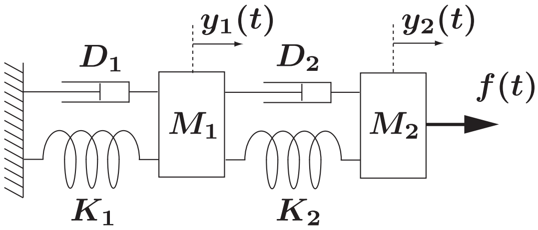

図 1: マス–ばね–ダンパ系

解答

$f_1(t), f_2(t)$ の式を与えられた微分方程式に代入して整理するとつぎを得る．

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) &= -\dfrac{D_1 + D_2}{M_1}\dot{y}_1(t) + \dfrac{D_2}{M_1}\dot{y}_2(t) - \dfrac{K_1 + K_2}{M_1}y_1(t) + \dfrac{K_2}{M_1}y_2(t) \\ \ddot{y}_2(t) &= \dfrac{D_2}{M_2}\dot{y}_1(t) - \dfrac{D_2}{M_2}\dot{y}_2(t) + \dfrac{K_2}{M_2}y_1(t) - \dfrac{K_2}{M_2}y_2(t) + \dfrac{1}{M_2}f(t) \end{cases}$$

これより状態空間表現はつぎとなる（入力を表す $f(t)$ は $u(t)$ と書いてもよい）．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{K_1+K_2}{M_1} & -\dfrac{D_1+D_2}{M_1} & \dfrac{K_2}{M_1} & \dfrac{D_2}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{K_2}{M_2} & \dfrac{D_2}{M_2} & -\dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{D_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{M_2} \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$　（各 10 点．計 20 点）

つぎで与えられる状態空間表現について，つぎの問いに答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) & = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

(1) システムの極と可制御性行列を示したうえで可制御性を調べ，閉ループ極が $-4, -6$ となるように状態フィードバックゲインを設計せよ．

(2) システムの可観測性行列を示したうえで可観測性を調べ，状態オブザーバを設計せよ．オブザーバゲインは各自決めてよいが，選んだ根拠を示せ．

解説

本講義の重要事項である，状態フィードバックとオブザーバに関する問題です．

学習教育目標との関連： (4), (5), (6), (7), (8)

解答：(1) はシステムの極を示して 3 点，可制御性を調べて 2 点，状態フィードバックゲインを示して 5 点．(2) は可観測性行列を調べて 5 点，オブザーバを設計して 5 点

(1) システムの極はつぎとなる．

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+3 & -6 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 5\lambda + 4 \\ &= (\lambda+4)(\lambda+1) \end{aligned}$$

$$\lambda = -4, -1$$

また，可制御性行列 U_c は

$$U_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ |U_c| = 8 \neq 0$$

となるので，U_c のランクは 2 となり，システムは可制御であることがわかる．したがって，状態フィードバック則を用いてシステムの極を任意に配置することができる．つぎに状態フィードバック則を $u(t) = -\boldsymbol{f}x(t)$ として，フィードバックゲイン $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ を設計する．

$$A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2f_1 & 2f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-2f_1 & 1-2f_2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

となるので，

$$\begin{aligned} |\lambda I - A + \boldsymbol{bf}| &= \begin{vmatrix} \lambda + 3 + f_1 & -1 + 2f_2 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + (5 + 2f_1)\lambda + 4f_1 + 4f_2 + 4 \end{aligned}$$

となる．これが $\lambda^2 + 10\lambda + 24$ となる必要があることから，係数比較を行うことで求める状態フィードバックゲインは

$$f_1 = \frac{5}{2}, f_2 = \frac{5}{2}$$

となることがわかる．

(2) システムの可観測性行列はつぎとなる．

$$U_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},\ |U_o| = 1 \neq 0$$

よって U_o のランクは 2 となり，システムは可観測であることがわかる．したがって，オブザーバを用いて状態ベクトルの値を推定できることがわかる．オブザーバの式

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{h}y(t) - \boldsymbol{hc}\hat{x}(t) = (A - \boldsymbol{hc})\hat{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{h}y(t)$$

より $A - \boldsymbol{hc}$ の極を $-8, -9$ となるようにオブザーバゲイン $\boldsymbol{h}$ を決定する．**このようにオブザーバゲインを選んだ根拠は，状態フィードバックにより設計する閉ループ極 $-4, -6$ よりオブザーバの極がより左半平面に存在するように設計し，状態が収束するより速くオブザーバにより推定される推定値を真値に収束させるためである．**したがって

$$\begin{aligned} |\lambda I - A + \boldsymbol{hc}| &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 + h_1 & 1 \\ 2 - h_2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + (h_1 + 5)\lambda + 2h_1 + h_2 + 4 \end{aligned}$$

オブザーバの極が $-8, -9$ となるためには $\lambda^2 + 17\lambda + 72$ となる必要があるので，係数比較をして

$$\begin{cases} h_1 &= 12 \\ h_2 &= 44 \end{cases}$$

を得る．

$\boxed{4}$ （20 点）

閉ループ系の極が $-4, -1$ である可制御な 2 次システムに対して，状態フィードバック則を適用して閉ループ系の安定化を行った結果，図 2 に示す応答を得た．図中の線はそれぞれ異なる位置に閉ループ極を配置した場合の応答を表している．

①, ②, ③に示す応答と，配置した閉ループ極の位置の関係について，複素平面の図に閉ループ極の位置を描いた上で，文章で説明せよ．

解答：説明 10 点，図 10 点

図 2 の応答を見ると，$x_1(t), x_2(t)$ のいずれも①, ②, ③の順に応答の振動が激しくなっている．これより①, ②, ③になるにつれ**閉ループ極の虚数部が大きな値となっている**ことがわかる．これを図示すると図 3 となる．

$\boxed{5}$ （(1), (2) は 5 点，(3) は 10 点．計 20 点）

つぎの問に答えよ．

(1) 状態フィードバックによる極配置法にはどのような問題点があるか述べよ．

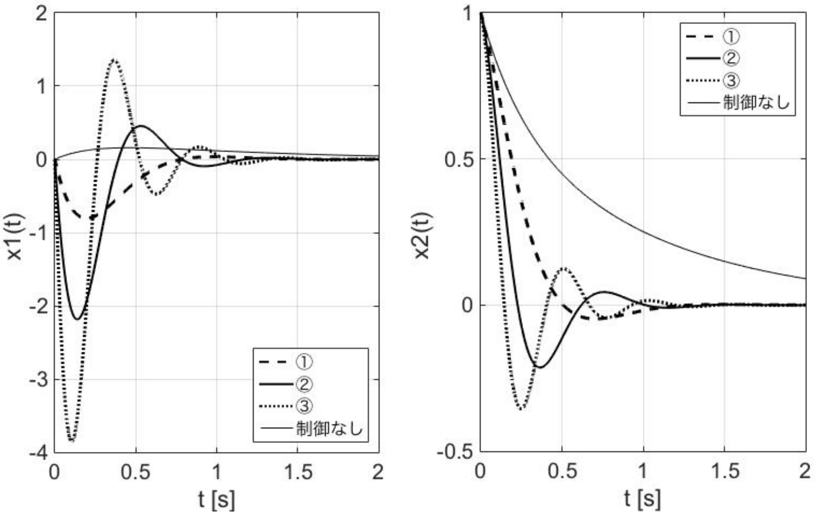

図 2: 2 次システムの状態フィードバック後の初期値応答

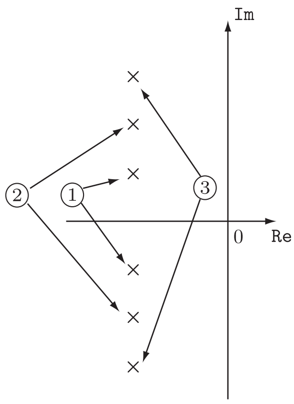

図 3: 極の分布の様子

(2) 極配置法に比べて，評価関数を $\int_0^\infty (\boldsymbol{x}^\top(t)Q\boldsymbol{x}(t)+ru^2(t))\mathrm{d}t$ とする最適レギュレータの利点と問題点を述べよ．

(3) 折り返し法による最適レギュレータの設計は，どのような事が可能かを述べよ．

解説：
講義 14 で説明した最適レギュレータに関する問題です．具体的な設計はできなくてもよいですが，存在意義くらいは説明できるようになって欲しいので出題しました．
学習教育目標との関連： (9)

解答：重要な文節を太字で表した．これをキーワードとして (1), (2) は 5 点，(3) は 10 点．計 20 点

(1) システムが可制御の場合，任意の位置に極配置可能であるが，**応答や入力の最大値やエネルギーなどを考慮できない**．

(2) **応答や入力のエネルギーなどを考慮することで制御性能と必要な入力の大きさのバランスを考えることができる．閉ループ系の安定性は保証される**一方，**閉ループ極を任意の位置に配置することができない**．

(3) **閉ループシステムの最適性を満足しつつ，折り返し線より右側にある極を，折り返し線を対称軸として，より左半平面に配置することができる**．