平 成 29 年 度 佐 賀 大 学 理 工 学 部 機 械 シ ス テ ム 工 学 科 定 期 試 験 問 題
機　　械　　制　　御 II（選　　択）

読めない文字，答えのみ，また問いの条件に従っていない解答は採点の対象外となる場合がある

$\boxed{1}$ （1 つ 2 点．計 20 点）

つぎの文章の空欄に入る適切な語句を，語句一覧から選び，記号で答えよ．$\boxed{(1)}$

いわゆる現代制御理論による制御系設計の場合，制御対象となるシステムの動特性を線型常微分方程式で表した上で，システムの物理変数をもとに状態変数を適切に選び状態空間表現を得る．システムの特性は係数行列 A の固有値によって決定され，全ての固有値の実部が負の場合，システムは安定となる．システムの固有値に重複がない場合，対角正準形式に変換すると，その係数行列 $\tilde{A}$ の対角成分にはもとのシステムの固有値が並ぶ．A の固有値の実部が正の値となる場合や，原点に近い場合，システムが可制御であれば状態フィードバック制御により閉ループシステムの固有値を任意の場所に配置することができ，これを極配置と呼ぶ．状態ベクトルのすべての成分が計測できない場合，システムが可観測であればオブザーバを用いて状態ベクトルを推定することが可能である．このとき，状態フィードバックゲインとオブザーバゲインは独立に選ぶことが可能である．

語句一覧

(A) 状態変数, (B) 中間変数, (C) 状態空間表現, (D) 伝達関数表現, (E) 固有値, (F) 固有ベクトル, (G) 正, (H) 負, (I) 不安定, (J) 安定, (K) 対角成分, (L) 直交成分, (M) 可制御, (N) 不可制御, (O) 根配置, (P) 極配置, (Q) 不可観測, (R) 可観測, (S) オブザーバ, (T) アブソーバー

解答

(1) A, (2) C, (3) E, (4) H, (5) J, (6) K, (7) M, (8) P, (9) R, (10) S

$\boxed{2}$ （(1), (2) は各 5 点，(3) は 10 点．計 20 点）

図 1 は講義の際にも説明した倒立振子である．図 1 に示すとおり，台車の質量を M，振子の質量を m，慣性モーメントを J，振子の重心までの長さを ℓ，基準点から台車までの距離を $z(t)$，振子の傾きを $\theta(t)$，台車に加える力を $f(t)$ とする．ラグランジュ方程式（機械力学 II で習うはずです）を使うと，台車の変位 $z(t)$，振子の角度 $\theta(t)$ に関する運動方程式はつぎとなる．

$$
\begin{aligned}
(M+m)\ddot{z}(t) + m\ell\cos\theta(t)\ddot{\theta}(t) - m\ell\dot{\theta}^2(t)\sin\theta(t) &= f(t) \\
m\ell\cos\theta(t)\ddot{z}(t) + (J+m\ell^2)\ddot{\theta}(t) - mg\ell\sin\theta(t) &= 0
\end{aligned}
$$

このとき，つぎの問いに答えよ．

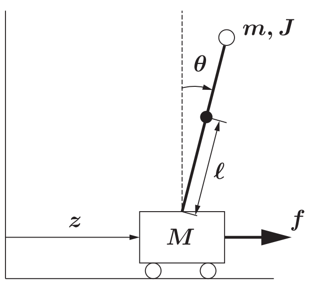


図 1: 倒立振子（図中の文字は見やすくするため太文字で表しているが，いずれもスカラーである）

(1) $\theta(t)$ が微小な平衡点近傍（$\theta(t) \approx 0$）で推移すると仮定すれば，$\cos\theta(t) \fallingdotseq 1$，$\sin\theta(t) \fallingdotseq \theta(t)$ とすることができる．この仮定のもとで与式を線形化せよ．

(2) (1) で得られた線形化した式を $\ddot{z}(t) = \cdots$ と $\ddot{\theta} = \cdots$ の 2 式で表せ．

(3) (2) 式において，状態変数ベクトルを $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} z(t) & \theta(t) & \dot{z}(t) & \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ と選んだ場合の状態空間表現を示せ．ただし入力を $u(t) = f(t)$，出力を $\theta(t)$ とする．

解答

(1)

平衡点近傍で与式を線形化するとつぎとなる．

$$
\begin{aligned}
(M+m)\ddot{z}(t)+m\ell\ddot{\theta}(t)&=f(t)\\
m\ell\ddot{z}(t)+(J+m\ell^2)\ddot{\theta}(t)-mg\ell\theta(t)&=0
\end{aligned}
$$

(2)

少々ややこしいかもしれませんが，つぎのようになります．

$$
\begin{aligned}
\{(M+m)(J+m\ell^2)-m^2\ell^2\}\ddot{z}(t)+m^2\ell^2g\theta(t)&=(J+m\ell^2)f(t)\\
\{(M+m)(J+m\ell^2)-m^2\ell^2\}\ddot{\theta}(t)-(M+m)mg\ell\theta(t)&=-m\ell f
\end{aligned}
$$

(3)

両式に共通する項が長いので，$\alpha=(M+m)(J+m\ell^2)-m^2\ell^2$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\ddot{z}(t)&=-\frac{m^2\ell^2g}{\alpha}\theta(t)+\frac{J+m\ell^2}{\alpha}f(t)\\
\ddot{\theta}(t)&=\frac{(M+m)mg\ell}{\alpha}\theta(t)-\frac{m\ell}{\alpha}f
\end{aligned}
$$

これより状態空間表現はつぎとなります．

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}z(t)\\ \theta(t)\\ \dot{z}(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&-\dfrac{m^2\ell^2g}{\alpha}&0&0\\0&\dfrac{(M+m)mg\ell}{\alpha}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z(t)\\ \theta(t)\\ \dot{z}(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \dfrac{J+m\ell^2}{\alpha}\\ -\dfrac{m\ell}{\alpha}\end{bmatrix}u(t)
$$

$$
y(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z(t)\\ \theta(t)\\ \dot{z}(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix}
$$

$\boxed{3}$ （各 10 点．計 20 点）

つぎで与えられる状態空間表現について，つぎの問いに答えよ．

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) &= \begin{bmatrix}1&2\\-3&-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}u(t)\\
y(t) &= \begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)
\end{cases}
$$

(1) システムの極と可制御性行列を示したうえで可制御性を調べ，閉ループ極が $-3,-7$ となるように状態フィードバックゲインを設計せよ．

(2) システムの可観測性行列を示したうえで可観測性を調べ，状態オブザーバを設計せよ．オブザーバゲインは各自決めてよいが，選んだ根拠を示せ．

解答

(1)

極は $-1,-2$ であり，可制御性行列は $U_c=\begin{bmatrix}2&8\\3&-18\end{bmatrix}$ であるので可制御である．状態フィードバック制御則を $u(t)=-\boldsymbol{f}\boldsymbol{x}(t)$ とし，$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}f_1&f_2\end{bmatrix}$ とすると，

$$
\left|\lambda I-A+\boldsymbol{b}\boldsymbol{f}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1+2f_1&-2+2f_2\\3+3f_1&\lambda+4+3f_2\end{vmatrix}=\lambda^2+(2f_1+3f_2+3)\lambda+14f_1-9f_2+2
$$

であり，望ましい特性多項式は $(\lambda+3)(\lambda+7)=\lambda^2+10\lambda+21$ であるので，係数比較を行うと

$$\begin{cases} 2f_1+3f_2+3 &= 10 \\ 14f_1-9f_2+2 &= 21 \end{cases}$$

となるので，これより $f_1=2$，$f_2=1$ を得る．

(2)

オブザーバの式は省略して，オブザーバゲインを $\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ とすると，

$$\left|\lambda I - A + \boldsymbol{hc}\right| = \begin{vmatrix} \lambda-1+h_1 & -2 \\ 3+h_1 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2+(h_1+3)\lambda+4h_1+2h_2+2$$

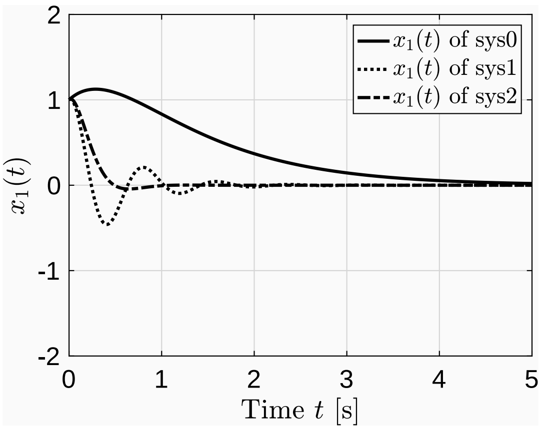
オブザーバの極とオブザーバゲインの組み合わせはつぎのとおり．

オブザーバの極：$-8,-9$ の場合，オブザーバゲインは $\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix}$

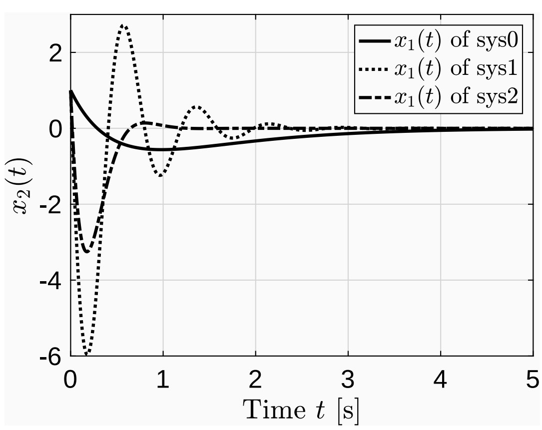
オブザーバの極：$-9,-10$ の場合，オブザーバゲインは $\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix}$

$\boxed{4}$ （20 点）

閉ループシステムの極が $-1,-2$ である可制御な 2 次システムに対して，状態フィードバック制御則を適用して閉ループシステムの安定化を行った結果，図 2 に示す応答を得た．図中の線において，sys0 は自由システムの応答，sys1, sys2 はある場所に閉ループ極を配置した閉ループシステムの応答である．配置した閉ループ極の位置の関係について，複素平面に閉ループ極の位置を描いた上で，文章で説明せよ．



(a) $x_1(t)$ のグラフ



(b) $x_2(t)$ のグラフ

図 2: 開ループシステム，閉ループシステムの応答

解答

sys1 と sys2 の応答を比較すると sys1 の方が振動が激しく 0 への収束が遅い．sys2 も若干振動しているが収束は早い．sys1 は $-2\pm j8$ に，sys2 は $-5\pm j5$ に極を配置している．閉ループ極の図的関係があっていれば良い．

$\boxed{5}$ （(1) は 10 点，(2)，(3) は各 5 点．計 20 点）

つぎの問に答えよ．

(1) ステップ状の定値外乱が抑制可能な制御則を設計する場合，積分制御の項を付加するが，その項の役割について述べよ．

(2) 極配置法に比べて，評価関数を $\displaystyle\int_0^\infty (\boldsymbol{x}^\mathsf{T}(t)Q\boldsymbol{x}(t)+ru^2(t))\mathrm{d}t$ とする最適レギュレータの利点と問題点を述べよ．

(3) 折り返し法による最適レギュレータの設計は，どのような事が可能かを述べよ．

解答：

(1) のポイントは定常偏差をゼロにする役割と，積分項により一定の入力が加え続けられることである．これらをそれぞれ 5 点として採点した．

(1) 定値外乱による応答が生じる定常偏差をゼロにする役割がある．応答の積分値を入力に加えることで，誤差がゼロになっても一定の入力値が加え続けられることとなり，定常偏差がゼロにできる．

(2) 応答や入力のエネルギーなどを考慮することで制御性能と必要な入力の大きさのバランスを考えることができる．閉ループ系の安定性は保証される一方，閉ループ極を任意の位置に配置することができない．

(3) 閉ループシステムの最適性を満足しつつ，折り返し線より右側にある極を，折り返し線を対称軸として，より左半平面に配置することができる．