$\boxed{1}$

つぎの式で表される 1 次遅れ系について答えよ．

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t) + bu(t), x(0) = x_0 \neq 0$$

(1) 1 次遅れ系の自由応答を求めよ．

(2) a の値に応じて自由応答の様子は異なることが知られている．a の値が $a = -0.1, -1, -5$ の場合について，応答の概形を描け．図中の応答の線が a のどの値を示しているのかも明示せよ．

解答

(1) 講義資料に示したとおりつぎとなる．

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}x(0)$$

(2) 講義資料に示したとおり，a の値が負側に大きいほど 0 への収束が早い．図 1 に $x(0) = 1$ とした場合の応答の概形図を示す．

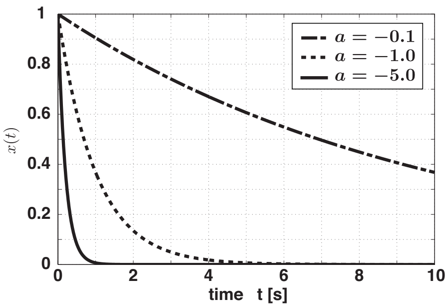

図 1: 1 次遅れ系の応答

$\boxed{2}$

図 2 に示す 2 個のタンクが結合したシステムを考える．図において，q_i は流入流量，q_o は流出流量，C はタンクの断面積，h は水位，R は出口抵抗であり，右下添字の数字は各タンクごとに付けられた番号である．タンク単体の場合，水位の変化の微分方程式はつぎで与えられる．

$$C\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -q_o(t) + q_i(t) = -\frac{1}{R}h(t) + q_i(t)$$

いま $h_1(t) > h_2(t)$ とすると，タンク 1, 2 の水位の差によってタンク 1 の流出流量，タンク 2 の流入流量が決まるとする．このときつぎの問いに答えよ．

(1) タンク 1, 2 の水位の変化を表す微分方程式を示せ．

(2) (1) の結果より，状態変数ベクトルを $\begin{bmatrix} h_1(t) & h_2(t) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$，出力を $y(t) = \dfrac{1}{R_1}(h_1(t) - h_2(t))$ としたときの状態空間表現を示せ．

解答

(1)

タンク 1 とタンク 2 の間の管を流れる水量は仮定より $\dfrac{1}{R_1}(h_1(t) - h_2(t))$ となる．この水量はタンク 1 では流出流量，タンク 2 では流入流量となる．よって，タンク 1, 2 の水位の変化を表す微分方程式はつぎとなる．

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{C_1R_1}(h_1(t) - h_2(t)) + \frac{1}{C_1}q_{i1}(t) \\
\frac{\mathrm{d}h_2(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{C_2R_1}(h_1(t) - h_2(t)) - \frac{1}{C_2R_2}h_2(t)
\end{aligned}$$

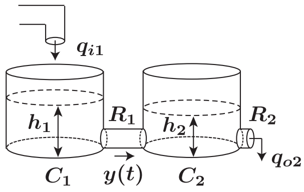

図 2: 2 タンクシステム

(2)

(1) の結果より，つぎの状態空間表現が得られる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C_1R_1} & \dfrac{1}{C_1R_1} \\ \dfrac{1}{C_2R_1} & -\dfrac{1}{C_2R_1}-\dfrac{1}{C_2R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_{i1}(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} & -\dfrac{1}{R_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

つぎの伝達関数表現で与えられるシステムの状態空間表現を求めよ．ただし各状態変数と変数の微分との対応を明らかにすること．

(1) $G(s) = \dfrac{2s^3+5s^2+5s+5}{s^3+2s^2+s+1}$

(2) $G(s) = \dfrac{2s^2+4s+5}{s^3+s+3}$

解答

(1)

プロパーな伝達関数であるので分子を分母で割るとつぎとなる．

$$G(s) = 2 + \frac{s^2+3s+3}{s^3+2s^2+s+1}$$

よって講義資料に示したとおりに考えると状態空間表現はつぎとなる．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + 2u(t)$$

(2)

講義資料に示したとおりに考えると状態空間表現はつぎとなる．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

$\boxed{4}$

システムの状態空間表現がつぎで与えられるとするとき，つぎの問いに答えよ．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + bu(t), y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

(1) システムの極を求め，自由応答を求めよ．

(2) $u(t)$ を入力，$y(t)$ を出力として，つぎの場合の伝達関数表現を求めよ．

(i) $b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ の場合

(ii) $b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ の場合

解答

(1)

行列 $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値を計算すると

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -2 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

となるので固有値は $-3, -2$ となる．よってシステムの極は $-3, -2$ である．

また $|sI - A| = (s+2)(s+3)$ であるので $(sI - A)^{-1}$ の逆ラプラス変換はつぎとなる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{2}{s+3} & \dfrac{2}{s+2} - \dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{2}{s+2} - \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-3t} & 2\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t} & 2\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

よって自由応答はつぎとなる．

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-3t} & 2\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-3t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t} & 2\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_0$$

(2)

(i)

伝達関数 $G(s)$ はつぎとなる．

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+3}$$

(ii)

伝達関数 $G(s)$ はつぎとなる．

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+2)(s+3)}$$