$\boxed{1}$

つぎの式で表される 1 次遅れ系について答えよ．

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t) + bu(t), x(0) = x_0 \neq 0$$

(1) 1 次遅れ系の自由応答を求めよ．

(2) a の値に応じて自由応答の様子は異なることが知られている．a の値が $a = -0.1, -1, -5$ の場合について，応答の概形を描け．図中の応答の線が a のどの値を示しているのかも明示せよ．

解答

(1) 講義資料に示したとおりつぎとなる．

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}x(0)$$

(2) 講義資料に示したとおり，a の値が負側に大きいほど 0 への収束が早い．図 1 に $x(0) = 1$ とした場合の応答の概形図を示す（縦軸が $y(t)$ となっているが気にしない...）．

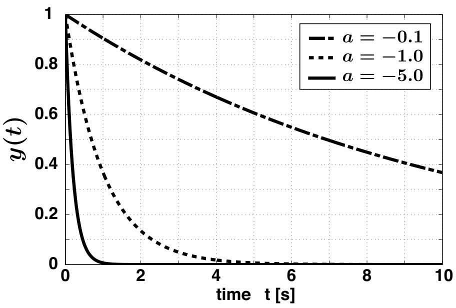

図 1: 1 次遅れ系の応答

$\boxed{2}$

図??に示す 2 慣性系を考える．入力トルク $\tau_1(t)$[N·m] によってモータが回転角速度 $\omega_1(t)$ で回転し，ねじりばね定数 K のカップリングを介して負荷を回転角速度 $\omega_2(t)$ で回転させている．また $\theta(t)$[rad] はねじれ角，J_1[kg·m^2] はモータの慣性モーメント，J_2[kg·m^2] は負荷の慣性モーメント，B_1[kg·m^2/s] はモータの粘性摩擦係数，B_2[kg·m^2/s] は負荷の粘性摩擦係数とする．このとき，システムの微分方程式はつぎで表される．

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_1(t) - \omega_2(t) \\ J_1\dfrac{\mathrm{d}\omega_1(t)}{\mathrm{d}t} + B_1\omega_1(t) + K\theta(t) = \tau_1(t) \\ J_2\dfrac{\mathrm{d}\omega_2(t)}{\mathrm{d}t} + B_2\omega_2(t) = K\theta(t) \end{cases}$$

状態ベクトルを $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$，$x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \omega_1(t)$，$x_3(t) = \omega_2(t)$，入力を $\tau_1(t)$, 出力を $y(t) = \omega_2(t)$ として微分方程式の状態空間表現を示せ．

解答

教科書 p. 29 の演習問題 (4) で微分方程式を書き換えた問題である．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\dfrac{K}{J_1} & -\dfrac{B_1}{J_1} & 0 \\ \dfrac{K}{J_2} & 0 & -\dfrac{B_2}{J_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix}u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$

つぎの伝達関数表現で与えられるシステムの状態空間表現を求めよ．ただし各状態変数と変数の微分との対応を明らかにすること．

(1) $G(s) = \dfrac{2s^3 + 9s^2 + 8s + 7}{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}$

(2) $G(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 3s^2 + 2}$

解答

レポート課題と同じ問題である．

(1) 与えられた伝達関数はつぎとなる．

$$G(s) = \frac{2s^3 + 9s^2 + 8s + 7}{s^3 + 4s^2 + 3s + 2} = 2 + \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}$$

よって状態空間表現はつぎとなる．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + 2u(t)$$

(2) 与えられた伝達関数より状態空間表現はつぎとなる．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

$\boxed{4}$

システムの状態空間表現がつぎで与えられるとするとき，つぎの問いに答えよ．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + bu(t), y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

(1) システムの極を求め，自由応答を求めよ．

(2) $u(t)$ を入力，$y(t)$ を出力として，つぎの場合の伝達関数表現を求めよ．

(i) $b = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^\top$ の場合

(ii) $b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ の場合

解答

(1)

$$\mathrm{e}^{At}x(0) = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+4}\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4}\right) \\ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4}\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+4}\right) \end{bmatrix} x(0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-4t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-4t} \\ 2(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-4t}) & 2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix} x(0)$$

(2)

(i)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{s^2 + 5s + 4}$$

(ii)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+3}{s^2 + 5s + 4}$$