$\boxed{1}$

つぎの式で表される 1 次遅れ系について答えよ．

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t) + bu(t), x(0) = x_0 \neq 0$$

(1) 1 次遅れ系の自由応答を求めよ．

(2) a の値に応じて自由応答の様子は異なる．a の値が $a = -0.1, -2, -10$ の場合について，応答の概形を描け．図中の応答の線が a のどの値を示しているのかを明示していない場合は減点する．

解答

(1) 講義資料に示したとおりつぎとなる．

$$x(t) = \mathrm{e}^{at} x(0)$$

(2) 講義資料に示したとおり，a の値が負側に大きいほど 0 への収束が早い．図 1 に $x(0) = 1$ とした場合の応答の概形図を示す（縦軸が $y(t)$ となっているのと $a = -0.1, -1.0, -5.0$ の場合であることは気にしない...）．

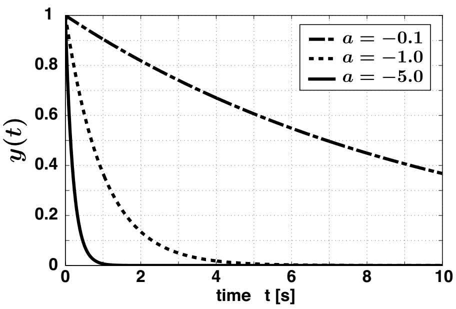

図 1: 1 次遅れ系の応答

$\boxed{2}$

図 2 に示す 3 層構造の建造物を考える．各階の床 m_i は外力 $f_i(t)$ を受けて変位を起こし，基準線からの変位量をそれぞれ $x_1(t)$ とする．m_i, d_i, k_i は各層の質量，減衰係数およびばね定数である．各層の水平方向の力の釣り合いを考えると，システムの微分方程式はつぎで表される．

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) & +d_1\dot{x}_1(t) + d_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) \\ & +k_1x_1(t) + k_2(x_1(t) - x_2(t)) = f_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2(t) & +d_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + d_3(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_3(t)) \\ & +k_2(x_2(t) - x_1(t)) + k_3(x_2(t) - x_3(t)) = f_2(t) \\ m_3\ddot{x}_3(t) & +d_3(\dot{x}_3(t) - \dot{x}_2(t)) + k_3(x_3(t) - x_2(t)) = f_3(t) \end{cases}$$

状態ベクトルを

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

とし，外力 $f_i(t)$ を入力としたとき，微分方程式の状態方程式を示せ．

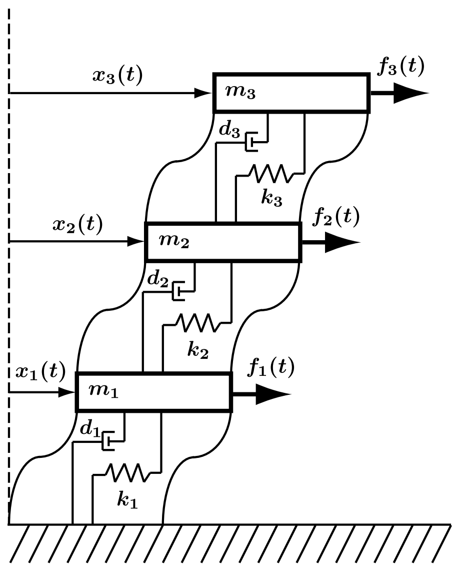

図 2: 3 層構造の構造物

解答

各変数の関係からつぎの関係が得られる．

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) &= x_4(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_5(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_6(t)\\ \dot{x}_4(t) &= -\dfrac{k_1+k_2}{m_1}x_1(t)+\dfrac{k_2}{m_1}x_2(t)-\dfrac{d_1+d_2}{m_1}x_4(t)+\dfrac{d_2}{m_1}x_5(t)+\dfrac{1}{m_1}f_1(t)\\ \dot{x}_5(t) &= \dfrac{k_2}{m_2}x_1(t)-\dfrac{k_2+k_3}{m_2}x_2(t)+\dfrac{k_3}{m_2}x_3(t)+\dfrac{d_2}{m_2}x_4(t)\\ &\quad -\dfrac{d_2+d_3}{m_2}x_5(t)+\dfrac{d_3}{m_2}x_6(t)+\dfrac{1}{m_2}f_2(t)\\ \dot{x}_6(t) &= \dfrac{k_3}{m_3}x_2(t)-\dfrac{k_3}{m_3}x_3(t)+\dfrac{d_3}{m_3}x_5(t)-\dfrac{d_3}{m_3}x_6(t)+\dfrac{1}{m_3}f_3(t)\end{cases}$$

これより状態方程式はつぎとなる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\\x_5(t)\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\-\dfrac{k_1+k_2}{m_1}&\dfrac{k_2}{m_1}&0&-\dfrac{d_1+d_2}{m_1}&\dfrac{d_2}{m_1}&0\\\dfrac{k_2}{m_2}&-\dfrac{k_2+k_3}{m_2}&\dfrac{k_3}{m_2}&\dfrac{d_2}{m_2}&-\dfrac{d_2+d_3}{m_2}&\dfrac{d_3}{m_2}\\0&\dfrac{k_3}{m_3}&-\dfrac{k_3}{m_3}&0&\dfrac{d_3}{m_3}&-\dfrac{d_3}{m_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\\x_5(t)\\x_6\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\\dfrac{1}{m_1}&0&0\\0&\dfrac{1}{m_2}&0\\0&0&\dfrac{1}{m_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\f_3(t)\end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$

つぎの伝達関数表現で与えられるシステムの状態空間表現を求めよ．ただし各状態変数と変数の微分との対応を明らかにすること．

(1) $G(s)=\dfrac{2s^3+13s^2+6s+7}{s^3+4s^2+3s+2}$

(2) $G(s)=\dfrac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+6}$

解答

レポート課題と同じ問題である．

(1) 与えられた伝達関数はつぎとなる．

$$G(s)=\frac{2s^3+13s^2+6s+7}{s^3+4s^2+3s+2}=2+\frac{5s^2+3}{s^3+4s^2+3s+2}$$

よって状態空間表現はつぎとなる．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-3&-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t), y(t)=\begin{bmatrix}3&0&5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+2u(t)$$

(2) 与えられた伝達関数より状態空間表現はつぎとなる．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&0&-5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t), y(t)=\begin{bmatrix}2&3&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

$\boxed{4}$

システムの状態空間表現がつぎで与えられるとするとき，つぎの問いに答えよ．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + bu(t), y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

(1) システムの極を求め，自由応答を求めよ．

(2) $u(t)$ を入力，$y(t)$ を出力として，つぎの場合の伝達関数表現を求めよ．

(i) $b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ の場合

(ii) $b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ の場合

解答

(1)

$$\mathrm{e}^{At}x(0) = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{3}{s+1} - \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{2}{s+2} \\ \dfrac{-3}{s+1} + \dfrac{3}{s+2} & \dfrac{-2}{s+1} + \dfrac{3}{s+2} \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-2t} \\ -3\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix} x(0)$$

(2)

(i)

$$G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -3 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

(ii)

$$G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -3 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s+10}{s^2+3s+2}$$