平 成 27 年 度 佐 賀 大 学 理 工 学 部 機 械 シ ス テ ム 工 学 科 定 期 試 験 問 題
機　　械　　制　　御II（選　　択）

1

つぎの式で表される 1 次遅れ系について答えよ．

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t) + bu(t), x(0) = x_0 \neq 0$$

(1) 1 次遅れ系の自由応答を求めよ．

(2) a の値に応じて自由応答の様子は異なる．a の値が $a = -0.1, -2, -10$ の場合について，応答の概形を描け．図中の応答の線が a のどの値を示しているのかを明示していない場合は減点する．

解答

(1) 講義資料に示したとおりつぎとなる．

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}x(0)$$

(2) 講義資料に示したとおり，a の値が負側に大きいほど 0 への収束が早い．図??に $x(0) = 1$ とした場合の応答の概形図を示す．

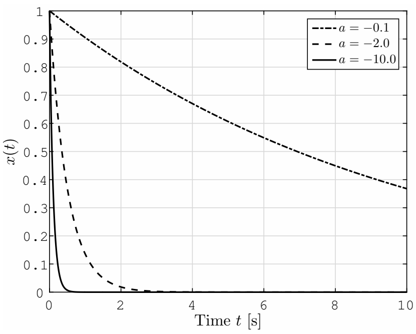

図 1: 1 次遅れ系の応答

2

図??に示す 2 個のマスばねダンパーが結合したシステムを考える．図において $i = 1, 2$ とし，$y_i(t)$ はマス i の自然長からの変位，K_i はばね定数，D_i はダンパ定数，$f(t)$ はマス 2 に作用する力である．

このシステムの運動方程式はつぎで表されるとしたとき，つぎの問いに答えよ．

$$\begin{cases} M_1\ddot{y}_1(t) &= -f_1(t) + f_2(t) \\ M_2\ddot{y}_2(t) &= -f_2(t) + f(t) \\ f_1(t) &= D_1\dot{y}_1(t) + K_1y_1(t) \\ f_2(t) &= D_2(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + K_2(y_2(t) - y_1(t)) \end{cases} \tag{1}$$

(1) 与えられた運動方程式から f_1, f_2 を消去し，$\ddot{y}_1(t) =$ と $\ddot{y}_2(t) =$ の式を示せ．

(2) (1) の結果より，状態変数ベクトルを $\begin{bmatrix} y_1(t) & \dot{y}_1(t) & y_2(t) & \dot{y}_2(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$，出力を $y(t) = y_2(t)$，入力を $u(t) = f(t)$ としたときの状態空間表現を示せ．

解答 (2) が少し面倒ですが，丁寧に考えて書いていけば正解を得るのはたやすいですね．

(1)

与えられた式よりつぎとなることがわかる．

$$\ddot{y}_1(t) = -\frac{D_1}{M_1}\dot{y}_1(t) - \frac{K_1}{M_1}y_1(t) + \frac{D_2}{M_1}(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + \frac{K_2}{M_1}(y_2(t) - y_1(t))$$

$$\ddot{y}_2(t) = -\frac{D_2}{M_2}(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) - \frac{K_2}{M_2}(y_2(t) - y_1(t)) + \frac{1}{M_2}f(t)$$

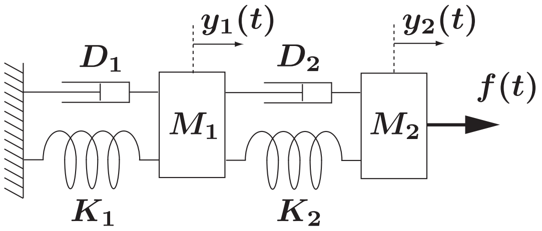

図 2: 2 つの連結されたマスばねダンパーシステム

(2)

(1) の結果より，つぎの状態空間表現が得られる．

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-K_1-K_2}{M_1} & \dfrac{-D_1-D_2}{M_1} & \dfrac{K_2}{M_1} & \dfrac{D_2}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{K_2}{M_2} & \dfrac{D_2}{M_2} & -\dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{D_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{M_2} \end{bmatrix} u(t)
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix}
$$

$\boxed{3}$

つぎの伝達関数表現で与えられるシステムの状態空間表現を求めよ．**ただし各状態変数と変数の微分との対応を明示していない場合は減点する．**

(1) $G(s) = \dfrac{2s^3+7s^2+6s+10}{s^3+3s^2+2s+4}$

(2) $G(s) = \dfrac{s^2+3s+4}{s^3+2s+5}$

解答

レポート課題と同じ問題である．

(1) 与えられた伝達関数はつぎとなる．

$$
G(s) = \frac{2s^3+7s^2+6s+10}{s^3+3s^2+2s+4} = 2 + \frac{s^2+2s+2}{s^3+3s^2+2s+4}
$$

よって状態空間表現はつぎとなる．

$$
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + 2u(t)
$$

(2) 与えられた伝達関数より状態空間表現はつぎとなる．

$$
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)
$$

$\boxed{4}$

システムの状態空間表現がつぎで与えられるとするとき，$u(t)$ を入力，$y(t)$ を出力として，つぎの問に答えよ．伝達関数は分母分子を因数分解し，既約な形で表現すること．

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0
$$

(i) 状態推移行列 e^{At} を求めよ．

(ii) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ の場合の伝達関数を求めよ．

(iii) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ の場合の伝達関数を求めよ．

解答

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 3 \\ -2 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+4 & -3 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}$$

となる．

(i)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{s+1} - \dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{3}{s+1} + \dfrac{3}{s+2} \\ \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{2}{s+1} + \dfrac{3}{s+2} \end{bmatrix}$$

となるので

$$\mathrm{e}^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-2t} & -3\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-2t} \\ 2\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

となる．

(ii)

$$G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & -3 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-3}{s^2+3s+2}$$

(iii)

$$G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & -3 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{3s-2}{s^2+3s+2}$$