1

つぎの式で表される 1 次遅れ系について答えよ．

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t) + bu(t), x(0) = x_0 \neq 0$$

(1) 1 次遅れ系の自由応答を求めよ．

(2) a の値に応じて自由応答の様子は異なる．a の値が $a = -0.1, -2, -10$ の場合について，応答の概形を描け．図中の応答の線が a のどの値を示しているのかを明示していない場合は減点する．

解答

(1) 講義資料に示したとおりつぎとなる．

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}x(0)$$

(2) 講義資料に示したとおり，a の値が負側に大きいほど 0 への収束が早い．図 1 に応答の概形図を示す．

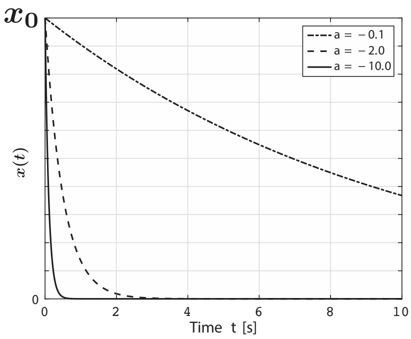

図 1: 1 次遅れ系の応答

2

図 2 の 2 流体間の熱交換を示す動的システムを考える（以下，各記号には適切な単位が割り当てられているものとする）．内部水槽と外部水槽において C_1 と C_2 はそれぞれ熱容量，θ_1, θ_2 は温度変化を表すとし，k は両流体間の総括熱伝達率とする．また外部水槽の外面は断熱とし，両流体ともに充分攪拌してあり，水槽内の温度は均一とする．いま，両水槽に流入する流体流量と温度をそれぞれ q_1, θ_{1i} および q_2, θ_{2i} とすれば，両流体について熱収支からつぎの連立微分方程式を得る．

$$\begin{cases} C_1\dfrac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} & = q_1\theta_{1i} - q_1\theta_1 - kA(\theta_1 - \theta_2) \\ \\ C_2\dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} & = q_2\theta_{2i} - q_2\theta_2 - kA(\theta_2 - \theta_1) \end{cases}$$

ここで A は熱通過面積である．このとき，つぎの問いに答えよ．

(1) 両流体の流量 q_1, q_2 が一定量である場合，θ_{1i}, θ_{2i} を入力とみなして上式を変形せよ．ただし $\dfrac{1}{kA} = R$ とせよ（両式の右辺において最終項が θ_{1i}, θ_{2i} の項となるように書け）．

(2) (1) の結果より，状態変数ベクトルを $\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{bmatrix}^\mathsf{T}$，入力を $u(t) = \begin{bmatrix}\theta_{1i} & \theta_{2i}\end{bmatrix}^\mathsf{T}$，出力を $y(t) = \theta_1(t)$ としたときの状態空間表現を示せ（本システムは 2 入力となるため入力ベクトルではなく入力行列となる）．

解答 (1) は 2 入力システムですが，行列とベクトルに掛け算が理解できていれば正解を得るのはたやすいですね．

(1)

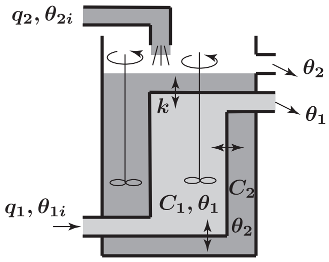

図 2: 簡単な熱交換システム

与えられた式よりつぎとなることがわかる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} &= -\left(\frac{1}{C_1 R} + \frac{q_1}{C_1}\right)\theta_1 + \frac{1}{C_1 R}\theta_2 + \frac{q_1}{C_1}\theta_{1i} \\
\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{C_2 R}\theta_1 - \left(\frac{1}{C_2 R} + \frac{q_2}{C_2}\right)\theta_2 + \frac{q_2}{C_2}\theta_{2i}
\end{aligned}
$$

(2)

(1) の結果より，つぎの状態空間表現が得られる．

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{C_1 R} + \frac{q_1}{C_1}\right) & \frac{1}{C_1 R} \\ \frac{1}{C_2 R} & -\left(\frac{1}{C_2 R} + \frac{q_2}{C_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{q_1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{q_2}{C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_{1i} \\ \theta_{2i}\end{bmatrix} \\
y(t) &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$

つぎの伝達関数表現で与えられるシステムの状態空間表現を求めよ．ただし各状態変数と変数の微分との対応を明示していない場合は減点する．

(1) $G(s) = \dfrac{3s^3 + 8s^2 + 10s + 15}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$

(2) $G(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 4}{s^3 + 2s + 3}$

解答

レポート課題と同じ問題である．

(1) 与えられた伝達関数はつぎとなる．

$$
G(s) = \frac{3s^3 + 8s^2 + 10s + 15}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4} = 3 + \frac{s^2 + s + 3}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}
$$

よって状態空間表現はつぎとなる．

$$
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}u(t), y(t) = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + 3u(t)
$$

(2) 与えられた伝達関数より状態空間表現はつぎとなる．

$$
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}u(t), y(t) = \begin{bmatrix}4 & 5 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)
$$

$\boxed{4}$

システムの状態空間表現がつぎで与えられるとするとき，$u(t)$ を入力，$y(t)$ を出力として，つぎの問に答えよ．伝達関数は分母分子を因数分解し，既約な形で表現すること．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

(1) 状態遷移行列 e^{At} を求めよ．

(2) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ の場合の伝達関数を求めよ．

(3) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^\top, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ の場合の伝達関数を求めよ．

解答

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+5s+6} \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}$$

となる．

(i)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{2}{s+3} & -\dfrac{2}{s+2} + \dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{2}{s+2} - \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

となるので

$$\mathrm{e}^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-3t} & -2\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} & 2\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

となる．

(ii)

$$G(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-2}{s^2+5s+6}$$

(iii)

$$G(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+2}{s^2+5s+6} = \frac{1}{s+3}$$