平成 21 年度佐賀大学理工学部機械システム工学科 中間試験解答

$\boxed{1}$

つぎの式で表される 1 次遅れ系について答えよ．

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t) + bu(t), x(0) = x_0 \neq 0$$

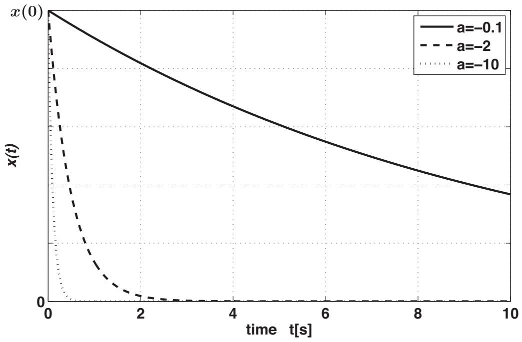
(1) 1 次遅れ系の自由応答を求めよ．

(2) a の値に応じて自由応答の様子は異なることが知られている．a の値が $a = -0.1, -2, -10$ の場合について，応答の概形を描け．図中の応答の線が a のどの値を示しているのかも明示せよ．

解答

(1) $x(t) = x_0\mathrm{e}^{at}$（導出の過程は省く）（**10 点**）

(2) いずれも初期値 $x(0)$ から出発して 0 に収束する応答となる．(**15 点**)



学習教育目標の (1), (2) に関連する問題．中間試験の前の講義で重要であることを説明した．
注意：(1) で C_0 としたままの場合は 5 点減点した．(2) は初期値を縦軸に書いていない場合は 5 点減点した．

$\boxed{2}$

下図で与えられる RLC システムについて，端子間に電圧 $v_{\mathrm{in}}(t)$ を加えたときに，回路内に電流 $i(t)$ が流れ，コンデンサの両端の電圧 $v_{\mathrm{out}}(t)$ の変化の様子を数式で表すと，つぎが成り立つ．

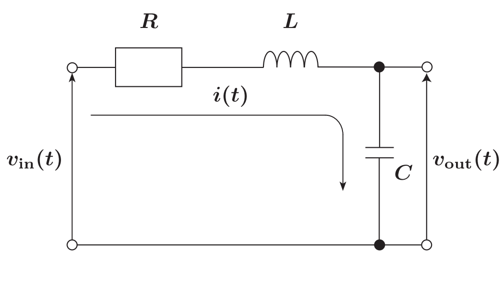
$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau = v_{\mathrm{in}}(t) \tag{1}$$

$$v_{\mathrm{out}}(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

(1) (2) 式の両辺を微分せよ．

(2) (1) 式と (1) の結果より，回路内の電流 $i(t)$ とコンデンサの両端の電圧 $v_{\mathrm{out}}(t)$ を状態変数とする状態空間表現を示せ．ただし出力はコンデンサの両端の電圧 $v_{\mathrm{out}}(t)$ とする．

(3) (2) の結果を用いて，入力 $v_{\mathrm{in}}(t)$ から出力 $v_{\mathrm{out}}(t)$ までの伝達関数を導出せよ．



解答

(1) **（10 点）**

$$\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{out}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}i(t)$$

(2) (1) 式と (1) の結果より，つぎが成り立つ．**（15 点）**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} &= -\dfrac{R}{L}i(t) - \dfrac{1}{L}v_{\mathrm{out}}(t) + \dfrac{1}{L}v_{\mathrm{in}}(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{out}}(t)}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{1}{C}i(t) \end{cases}$$

よって，回路内の電流 $i(t)$ とコンデンサの両端の電圧 $v_{\mathrm{out}}(t)$ を状態変数とし，出力をコンデンサの両端の電圧 $v_{\mathrm{out}}(t)$ とした状態空間表現はつぎとなる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} i(t) \\ v_{\mathrm{out}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t) \\ v_{\mathrm{out}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_{\mathrm{in}}(t)$$

$$y(t) = v_{\mathrm{out}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t) \\ v_{\mathrm{out}}(t) \end{bmatrix}$$

(3) **（10 点）**

$$\begin{vmatrix} s + \dfrac{R}{L} & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & s \end{vmatrix} = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$$

となるので，入力 $v_{\mathrm{in}}(t)$ から出力 $v_{\mathrm{out}}(t)$ までの伝達関数 $G(s)$ はつぎとなる．

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & s + \dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{LC}{LCs^2 + RCs + 1}\frac{1}{LC} \\ &= \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \end{aligned}$$

学習教育目標の (2) に対応する．
注意：(2) は問題の条件とは違う状態空間表現を導出している人が多数いたが，採点の対象外とした．

$\boxed{3}$
つぎで与えられるシステムの状態空間表現を求めよ．

(1) $G(s) = \dfrac{2s^3 + 6s^2 + 3s + 5}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$

(2) $G(s) = \dfrac{2s^2 + 4s + 5}{s^3 + s + 3}$

解答

(1) **（10 点）**

$$G(s) = \frac{2s^3 + 6s^2 + 3s + 5}{s^3 + 2s^2 + s + 2} = 2 + \frac{2s^2 + s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$$

となるので $\dfrac{2s^2 + s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$ の部分は

$$\frac{\mathrm{d}^3 x_1}{\mathrm{d}t^3} + 2\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + 2x_1 = u$$

$$y_1 = 2\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + x_1$$

となる．これより

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_3$$

とおくと

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -2x_1 - x_2 - 2x_3 + u$$

となるので状態空間表現はつぎとなる．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-2 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + 2u\end{aligned}$$

(2) **（10 点）**

$$G(s) = \frac{2s^2 + 4s + 5}{s^3 + s + 3}$$

これより

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_3$$

とおくと

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -3x_1 - x_2 + u$$

となるので状態空間表現はつぎとなる．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-3 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}5 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

学習教育目標の (2), (3) に対応する．

$\boxed{4}$

システムの状態空間表現がつぎで与えられるとする．

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix}4 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) = cx(t)\end{cases}$$

$u(t)$ を入力，$y(t)$ を出力として，つぎの場合の伝達関数表現を求めよ．

(1) $c = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ の場合

(2) $c = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$ の場合

解答まず

$$\begin{aligned}|sI - A| &= \begin{vmatrix}s-4 & -2\\-1 & s-4\end{vmatrix}\\ &= s^2 - 5s + 6\\ &= (s-2)(s-3)\end{aligned}$$

となる．

(1) **（10 点）**

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-2)(s-3)} \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -1 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{3(s-2)}{(s-2)(s-3)} \\ &= \frac{3}{(s-3)} \end{aligned}$$

(2) **（10 点）**

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-2)(s-3)} \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -1 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2s}{(s-2)(s-3)} \end{aligned}$$

学習教育目標の (2), (3) に対応する．